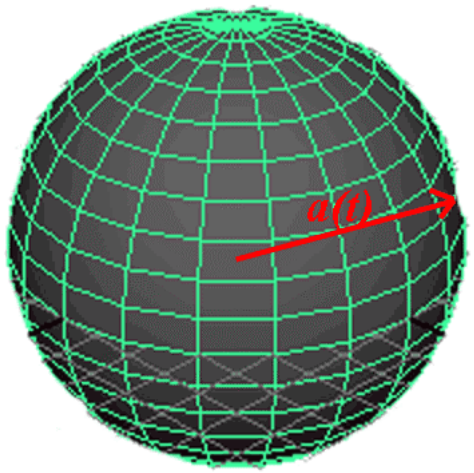
ВВЕДЕНИЕ В КОСМОЛОГИЮ
лекция 2

- Геометрия расширяющейся Вселенной
- Различные виды расстояний; горизонт
- Динамика Вселенной, космологические модели Фридмана

Метрика Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right)$$

$a(t)$ – масштабный фактор
k – параметр кривизны:
$k = 0$ – плоское пространство,
$k = \pm 1$ – пространство постоянной
положит./отрицат. кривизны
r – сопутствующие координаты



Параметр Хаббла $H(t) = \dfrac{\dot{a}}{a}$; красное смещение $z = \dfrac{a(t_0)}{a(t)} - 1$

Случай 1: $a(t) \propto t^\alpha$; тогда $H(t) = H_0\, t_0/t$
Случай 2: $a(t) \propto \exp(Ht)$; $H = \text{const}$

Виды расстояний

t_1 – время излучения, t_0 – время приёма сигнала; r_1 – координата удалённого объекта;
$a_0 = a(t_0)$ – текущий масштабный фактор, $a_1 = a(t_1) = \dfrac{a_0}{1+z}$ – м.ф. на момент излучения.

Метрическое расстояние между объектами:
$d_m = a_0\, R,$ где R – безразмерное координатное расстояние.

$$R = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \equiv f(r_1) = \begin{cases} \text{arcsin } r_1\,, & k=+1 \\ r_1\,, & k=0 \\ \text{arsh } r_1\,, & r=-1 \end{cases}$$

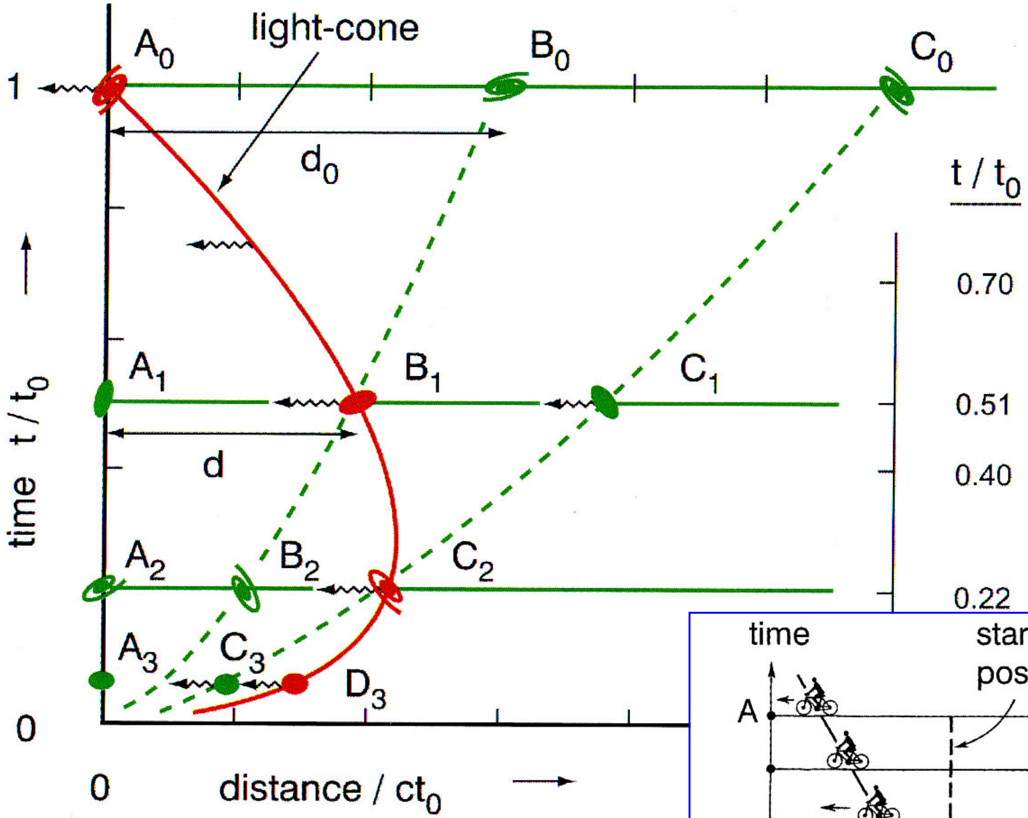
Угломерное расстояние: (D – поперечный размер, θ – угловой размер)

$$d_a = D/\theta = a_1\, r_1 = \frac{a_0\, r_1}{1+z}$$

Фотометрическое расстояние: (L – светимость, F – принимаемый поток)

$$d_l = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2}, \quad F = \frac{L}{4\pi (a_0 R)^2 (1+z)^2} \quad \Rightarrow \quad d_l = d_m\,(1+z)$$

Горизонт частиц и видимая Вселенная



Пусть $a(t) = a_0 (t/t_0)^{2/3}$

$$d_0 = a_0 \int_t^{t_0} \frac{c\,dt'}{a(t')}$$

$$d(t) = \frac{a(t)}{a_0} d_0 = a(t) \int_t^{t_0} \frac{c\,dt'}{a(t')}$$

$$\frac{d}{ct_0} = 3\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}\left[1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3}\right]$$

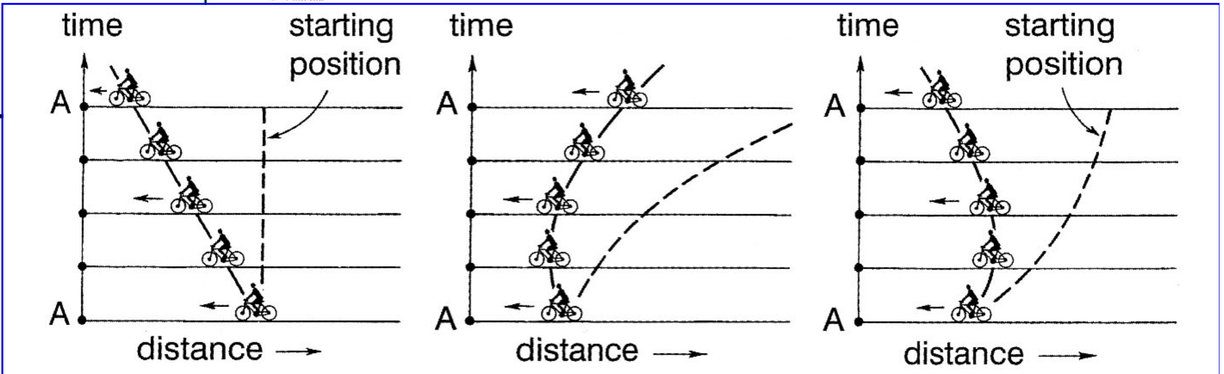
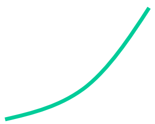


Fig. 11.3. Photon propagation in an expanding universe may be understood with the example of a cyclist moving at constant speed c with respect to the local road, while the road is being stretched like a rubber band. Left: no expansion, the path is a straight line with inclination c. Middle: the expansion is initially slow, but accelerates with time. Right: expansion is initially fast, but slows down with time, as in a real universe (for $\Omega_\Lambda = 0$).


световой конус


масштабный фактор

Горизонт частиц и видимая Вселенная

$$\text{масштабный фактор } a(t) \propto t^{\alpha}\ , \qquad \text{размер горизонта } R_{h,0} = a_0 \int_0^t \frac{c\,dt'}{a(t')} \propto t.$$

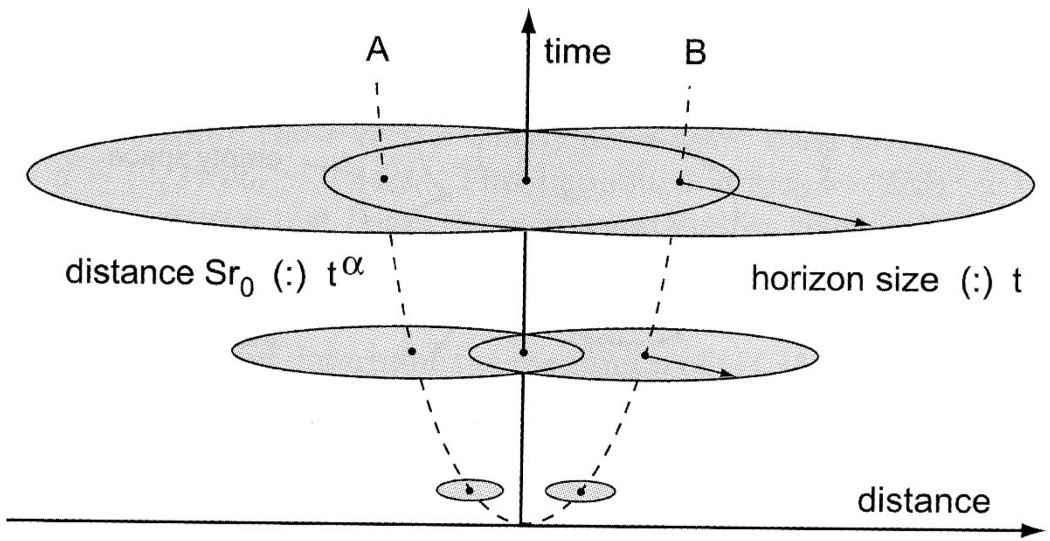


Fig. 11.4. The visible universe is the space inside the horizon of an observer. It contains all matter from which the observer may have received a light signal. The visible universes of any two observers A and B comoving with the Hubble flow overlap progressively, but were disjunct at some point in the past. A can only see B and vice versa after they have entered each other's horizon. This leads to the so-called *horizon problem*: why do A and B begin to participate in the expansion at the same moment?

Объём видимой Вселенной

Собственный объём сферического слоя на расстоянии $d(t)$ равен $4\pi d^2\, cdt$.

Полный собственный объём видимой Вселенной: $V_{prop} = \int_0^{t_0} 4\pi d^2(t)\, cdt$

$$d(t) = 3ct_0\, \tau^{2/3}(1 - \tau^{1/3})\,, \quad \text{где } \tau = t/t_0.$$

$$V_{prop} = \frac{4\pi}{3}(3ct_0)^3 \int_0^1 d\tau\, \tau^{4/3}(1 - \tau^{1/3})^2 \quad = \quad \frac{4\pi}{3}(3ct_0)^3\, \frac{1}{84}\,.$$

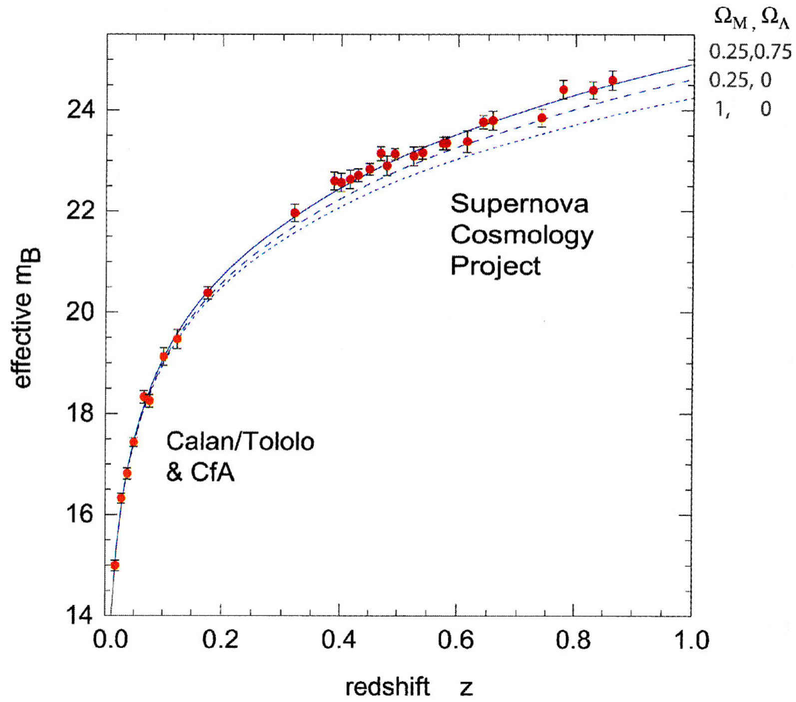
Хаббловские диаграммы

$$a_0 = a(z)(1+z) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = -(1+z)H(z)$$

Зависимость $d_l(z)$ измеряется из наблюдений. Для случая $k=0$:

$$d_m = \frac{d_l}{1+z} = a_0 r_1 = a_0 \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} \quad , \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{d_l(z)}{1+z}\right) = -a_0 \frac{c}{a(t_1)} \frac{dt}{dz}$$

$$H(z) = c\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{d_l(z)}{1+z}\right)\right]^{-1}$$



для $a(t) = a_0(t/t_0)^\alpha \quad H = \alpha/t$

$(1+z)^{-\alpha} = t/t_0 = H_0 t/\alpha$

Динамика расширения Вселенной

Ньютоновская аналогия

Рассмотрим расширяющийся шар радиуса $R(t)$ и массы M (плотности ρ).

Скорость границы шара $\dot{R} = v = HR, \quad \dot{v} = -\dfrac{GM}{R^2} = -\dfrac{4\pi}{3}G\rho R.$

Закон сохранения энергии: $\dfrac{1}{2}\dot{R}^2 - \dfrac{GM}{R} = \text{const} = E$

В наст. момент t_0: $\quad E = \dfrac{1}{2}H_0^2 R_0^2 - \dfrac{4\pi}{3}G\rho_0 R_0^2 = \dfrac{1}{2}R_0^2 H_0^2\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho_{cr}}\right)$

где $\rho_{cr} = \dfrac{3H_0^2}{8\pi G}$ – критическая плотность.

$\boxed{10^{-29}\ \text{г/см}^3}$

$\rho_0 > \rho_{cr}$ – замкнутая | | эллиптическая |
$\rho_0 = \rho_{cr}$ – плоская Вселенная $\Longleftrightarrow$ параболическая орбита
$\rho_0 < \rho_{cr}$ – открытая | | гиперболическая |

Динамика расширения Вселенной

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{cr}} \quad \text{– параметр плотности}$$

$$\dot{R}^2 = 2\left(E + \frac{GM}{R}\right) = R_0^2 H_0^2 \left(1 - \Omega_0 + \Omega_0 \frac{R_0}{R}\right) \ .$$

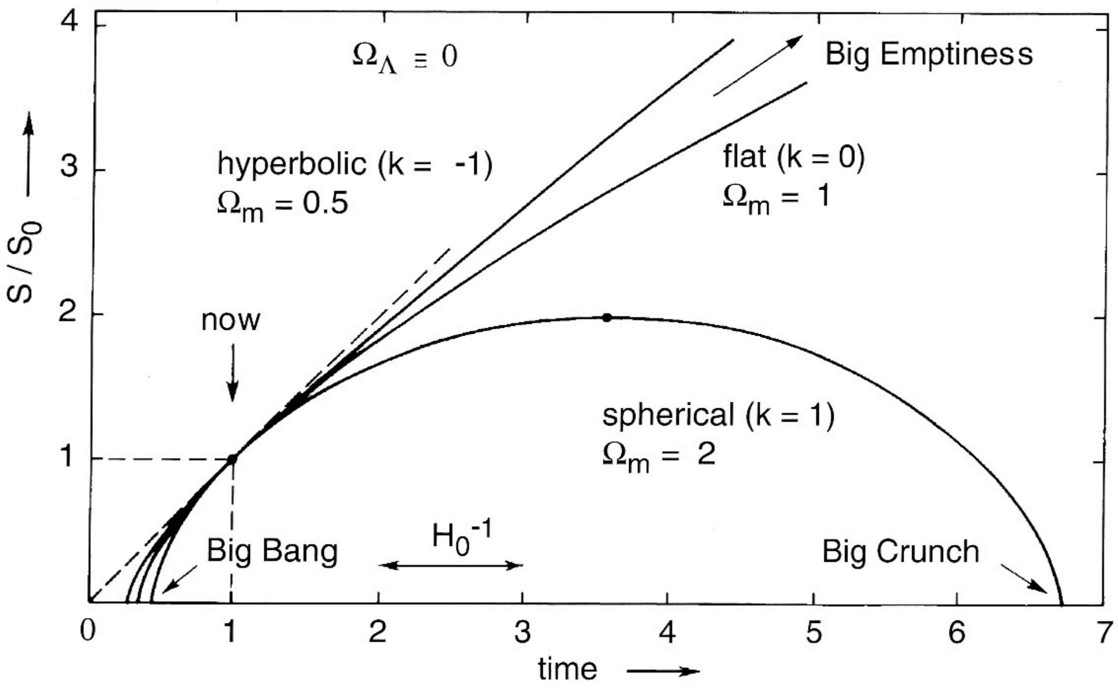


Fig. 10.1. Three solutions of eq. (10.10): an open, a flat and a closed FRW universe with $\Lambda = 0$, tuned to the same size and expansion rate at the present epoch t_0, arbitrarily located at $t = 1$. Time is in units of $H_0{}^{-1}$.

Уравнения Фридмана

для случая P=0:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G\rho \quad \text{– уравнение движения}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{k\,c^2}{a^2} \quad \text{– уравнение энергии}$$

$$\dot{\rho} = \frac{M}{(4\pi/3)a^3} \frac{-3\dot{a}}{a} = -3H\rho \quad \text{– уравнение неразрывности}$$

для случая P<>0:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{k\,c^2}{a^2}$$

$$\dot{\rho} = -3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)$$