

ВВЕДЕНИЕ В КОСМОЛОГИЮ

лекция 3

- Уравнения Фридмана
- Радиационно- и материально-доминированная эпохи
- Космологический Λ -член, тёмная энергия
- Температурная история Вселенной

Вывод уравнений Фридмана

Уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

В метрике Фридмана-Робертсона-Уокера метрический тензор

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -\frac{a^2}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = -a^2 r^2, \quad g_{33} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta;$$

тензор Ричи

$$R_{00} = \frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2} g_{ij}$$

$$G_{00} = -3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}, \quad G_{ij} = -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} g_{ij}$$

Вывод уравнений Фридмана

Тензор энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & & & 0 \\ & -P & & \\ & & -P & \\ 0 & & & -P \end{pmatrix} g_{\mu\nu}$$

Отсюда

два независимых уравнения

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad \text{уравнение энергии}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{уравнение движения}$$
$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \quad \Leftrightarrow \quad (\rho a^3) + P(a^3) = 0$$

адиабатичность расширения

Уравнения Фридмана в терминах Ω

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad - \text{ параметр Хаббла}$$

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} \quad - \text{ параметр замедления}$$

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad - \text{ критическая плотность}$$

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad - \text{ вклад вещества}$$

$$\Omega_c = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad - \text{ вклад кривизны}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad - \text{ вклад } \Lambda\text{-члена}$$

Уравнение энергии:

$$1 = \Omega_m + \Omega_c + \Omega_\Lambda$$

Уравнение движения:

$$q = \frac{1}{2} \frac{\rho + 3P}{\rho_{cr}} - \Omega_\Lambda$$

Качественный анализ решений

(при $\Omega_\Lambda = 0$)

Зададим уравнение состояния в виде $P = \omega E$ ($E \equiv \rho$ – плотность энергии):

$P = 0$ – «пыль» (нерелятивистское вещество);

$P = E/3$ – релятивистское вещество (излучение).

Из уравнения адиабатичности $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$.

$$q = \frac{1 + 3\omega}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda > 0 \text{ при } \Omega_\Lambda = 0$$

$$\frac{\Omega_c}{\Omega_m} \propto \frac{1}{a^2 \rho} \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow 0$$

Тогда при малых a кривизной можно пренебречь и получить

$$\Omega_m \rightarrow 1, \quad H = \frac{2}{3(1+\omega)t}, \quad a \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$$

При малых t – эра доминирования излучения: $\omega = 1/3$, $\rho \propto a^{-4}$, $a \propto t^{1/2}$.

При больших t – эра доминирования вещества: $\omega = 0$, $\rho \propto a^{-3}$, $a \propto t^{1/3}$.

Качественный анализ решений

(при $\Omega_\Lambda = 0$)

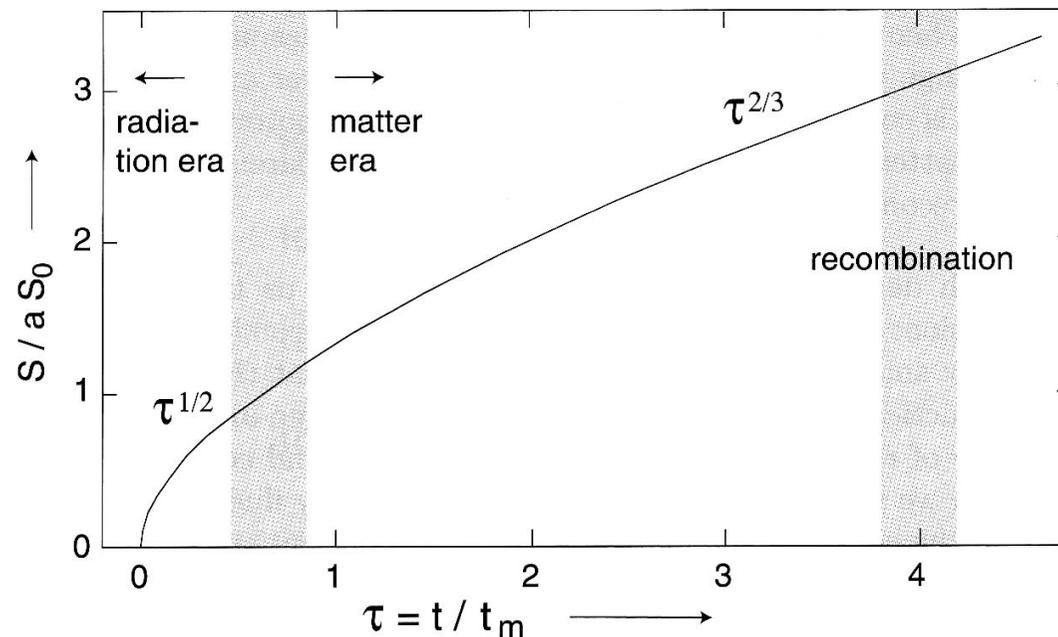
Соотношение между энергией излучения и вещества:

$$\rho_e / \rho_m \propto a^{-1} \propto 1 + z.$$

В настоящее время $\rho_{CMB} = 4.6 \times 10^{-34} \text{ г/см}^3 \approx 5 \times 10^{-5} \rho_{cr}$.

(CMB = Cosmic Microwave Background = реликтовое излучение; $T_{CMB} \approx 2.725 \text{ K}$).

Плотность холодного вещества $\Omega_m \approx 0.27$, т.е. переход между эпохой излучения и эпохой вещества был примерно при $z \approx 5000$.



В радиационно-доминированную эпоху
 $T \propto \rho^{1/4} \propto a^{-1}$

Рекомбинация:
 $z \sim 1000, T_{\text{изл}} \sim 3000 \text{ K}$

Учёт кривизны (классические модели Фридмана)

(при $\Omega_\Lambda = 0$, для холодного вещества)

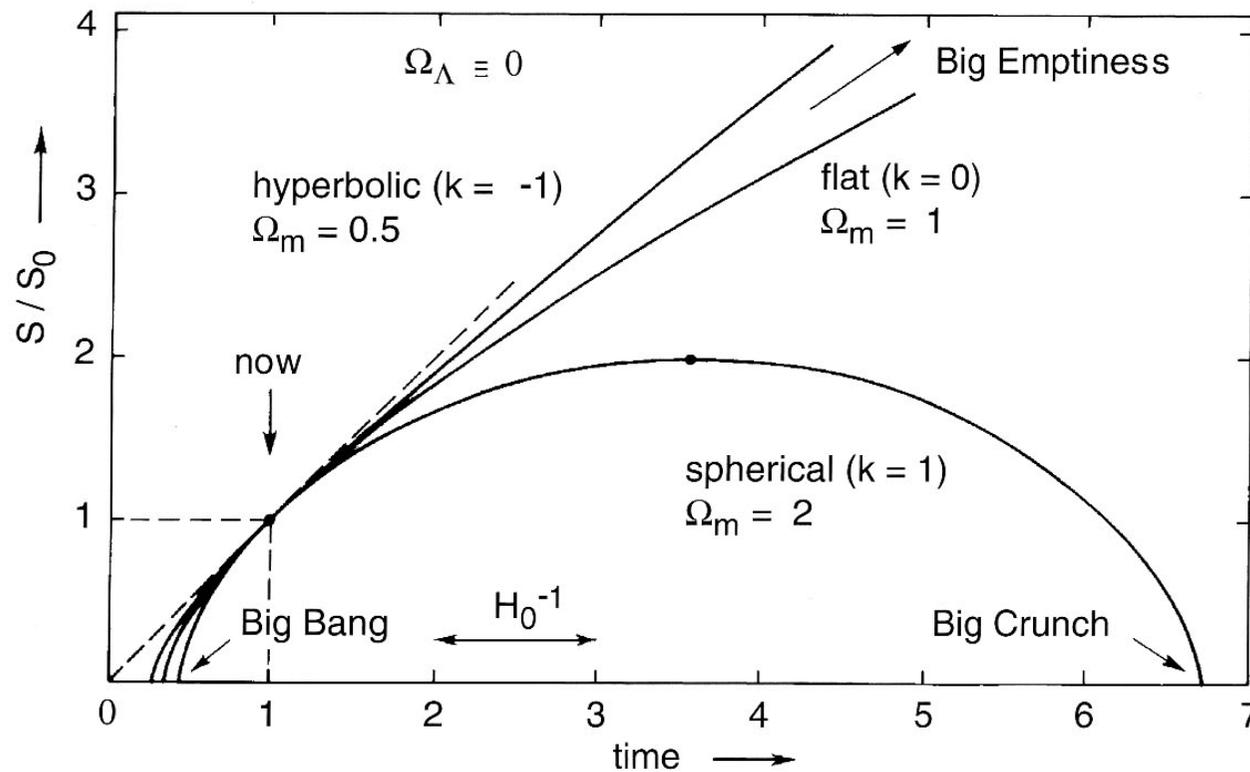


Fig. 10.1. Three solutions of eq. (10.10): an open, a flat and a closed FRW universe with $\Lambda = 0$, tuned to the same size and expansion rate at the present epoch t_0 , arbitrarily located at $t = 1$. Time is in units of H_0^{-1} .

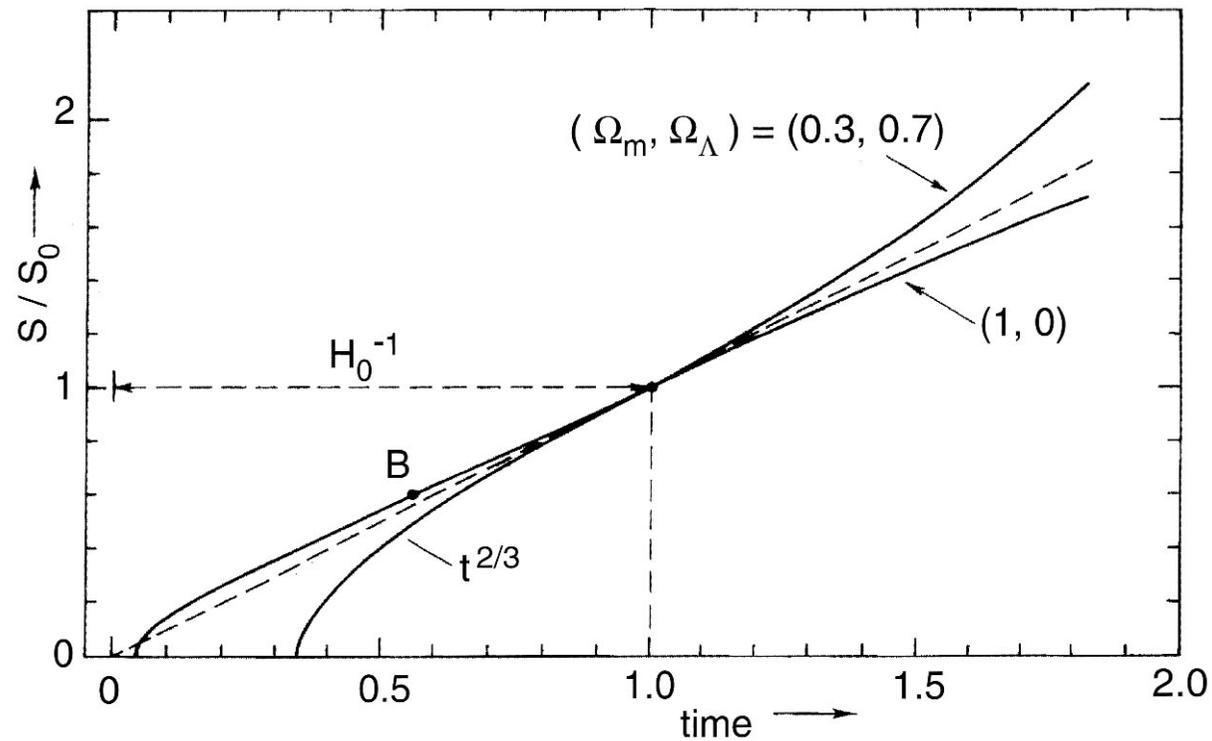
Λ -член (вакуумная энергия)

Эйнштейновская статическая Вселенная: $P = 0$, $k = +1$, $a = \Lambda^{-1/2}$.

Для вакуума $T_{\mu\nu} = \text{const} \cdot \eta_{\mu\nu}$, т.е. $P_v = -\rho_v$ ($\omega = -1$).

Плотность энергии вакуума $\rho_v = \Lambda/(8\pi G)$ – не зависит от a .

Вакуумно-доминированная Вселенная: $H = \text{const}$, $q = -1$, $a \propto e^{Ht}$.



Λ-член или тёмная энергия

Характерная квантовомеханическая плотность энергии

$$\rho_{pl} = m_{pl}/l_{pl}^3 \sim 10^{126} \text{ эВ/см}^3.$$

($m_{pl} = \sqrt{\hbar c/G} = 1.3 \times 10^{19} \text{ ГэВ} = 2 \times 10^{-5} \text{ г}$ – планковская масса,

$l_{pl} = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ см}$ – планковская длина;

$t_{pl} = l_{pl}/c = 0.5 \times 10^{-43} \text{ с}$ – планковское время).

Наблюдаемое значение $\rho_v \approx 0.7\rho_{cr} \sim 10^3 \text{ эВ/см}^3$.

проблема малости космологической постоянной

Альтернативные модели: «квинтэссенция» – скалярное поле с уравнением состояния $\rho = \omega P$, $\omega < -1/3$.

Проблема совпадения: $\Omega_m \approx \Omega_\Lambda$ в настоящее время.

общее название – тёмная энергия

Эволюция Вселенной в стандартной модели

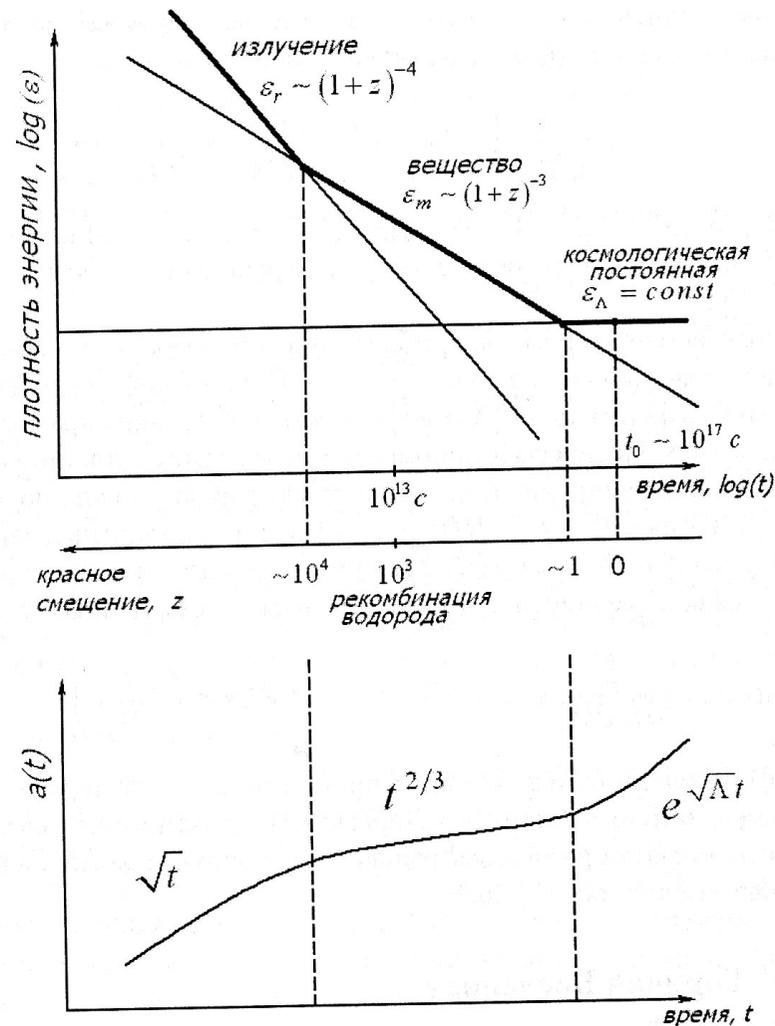


Рис. 12.8. Изменение плотности энергии различных компонентов Вселенной со временем, отсчитываемым от начала расширения. На нижнем графике — качественная зависимость масштабного фактора от времени в модели Вселенной с излучением, веществом и космологической постоянной $\Lambda > 0$.

Эволюция Вселенной – краткая схема



10^{-43} с – Большой Взрыв

10^{-33} с – эпоха холодной инфляции

1 с – эпохи кварков; адронов; лептонов

100 с – нуклеосинтез; $T \sim 10^9$ К

10^5 лет – начало эпохи доминирования вещества

$4 \cdot 10^5$ лет – рекомбинация, образование реликтового излучения; $T \sim 3000$ К

— Dark ages —

$z \sim 20$ (10^8 лет) – первые звёзды (Population III)

$z \sim 8-10$ – реионизация; первые квазары

$z \sim 2$ – расцвет «эпохи квазаров»; крупномасштабная структура

$z \sim 0.7$ – начало эпохи доминирования тёмной энергии

$z=0$ ($13.6 \cdot 10^9$ лет)

